

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

دورة: جوان 2014

وزارة التربية الوطنية

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

الشعبة: تقني رياضي

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05,5 نقاط)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة: $(z-i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$ (2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نسمي A ، B و C نقط المستوي التي لاحتقاتها على الترتيب $z_1 = \sqrt{3} + i$ ، $z_2 = \sqrt{3} - i$ و $z_3 = i$ (أ) أكتب العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسّي.(ب) هل توجد قيم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا؟ برّر إجابتك.(3) (أ) عيّن العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه A ويحول B إلى C ، محددًا نسبته وزاويته.(ب) استنتج طبيعة المثلث ABC (4) (أ) عيّن العناصر المميزة لـ (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق:

$$|z - z_1|^2 + |z - z_3|^2 = 5$$

(ب) عيّن (E') مجموعة النقط M من المستوي التي لاحتقتها z حيث: $|z - z_1| = |z - z_3|$

التمرين الثاني: (04,5 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان من الفضاء معرفان بتمثيليهما الوسيطيين التاليين:

$$(\Delta_2): \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 - t' \\ z = 4 + 2t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}) \quad \text{و} \quad (\Delta_1): \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

(1) (أ) عيّن إحداثيات النقطة B تقاطع المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) (ب) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) المعين بالمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) (2) (أ) أثبت أن النقطة $A(6; 4; 4)$ لا تنتمي إلى المستوي (P) (ب) بيّن أن النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P)

- (3) أ) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل النقطة A و $\vec{n}(5;1;-7)$ شعاع ناظمي له.
 ب) عيّن إحداثيات C و D نقطتي تقاطع (Q) مع كل من (Δ_1) و (Δ_2) على الترتيب.
 (4) أ) عيّن طبيعة المثلث BCD ، ثم أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$
 ب) استنتج مساحة المثلث ACD

التمرين الثالث: (04 نقاط)

I هي الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x) = x - \ln(x-1)$

(1) حدد حسب قيم x ، إشارة $f(x) - x$

(2) أ) عيّن اتجاه تغير f

ب) بيّن أنه إذا كان $x \in [2; e+1]$ فإن $f(x) \in [2; e+1]$

II (u_n) المتتالية المعرفة على \mathbb{N} كما يلي: $u_0 = e+1$ ومن أجل كل n من \mathbb{N} ، $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n - 1)$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من \mathbb{N} ، $u_n \in [2; e+1]$

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(3) برر تقارب المتتالية (u_n) ، ثم أحسب نهايتها.

التمرين الرابع: (06 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

I g الدالة المعرفة على المجال $]0;3[$ بـ: $g(x) = x \ln x + x$

(1) أدرس تغيرات الدالة g

(2) أ) بيّن أن المعادلة $g(x) = 2$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;3[$

ثم تحقق أن $1,45 < \alpha < 1,46$

ب) استنتج إشارة $g(x) - 2$

II التمثيل البياني المقابل (C_f) هو للدالة f المعرفة على

المجال $]0;3[$ بـ: $f(x) = |x - 2| \ln x$

(1) باستعمال (C_f) ضع تخمينا حول قابلية اشتقاق الدالة f عند 2

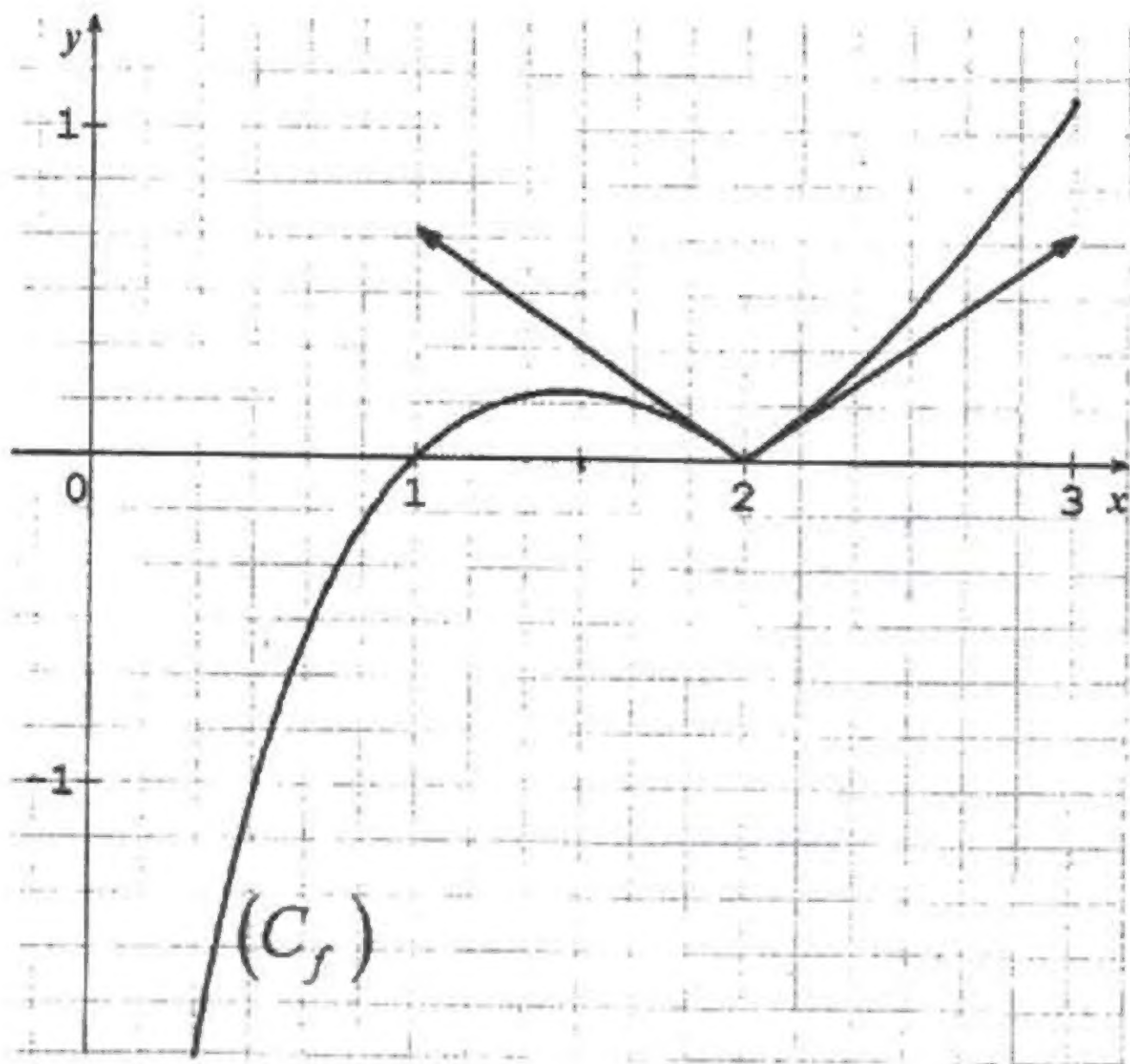
(2) أثبت صحة تخمينك.

(3) أدرس تغيرات الدالة f

III h الدالة المعرفة على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ كما يلي: $h(x) = (2 - \cos x) \ln(\cos x)$

(1) بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = \frac{\pi}{2}$ مقارب للمنحنى (C_h) ؛ حيث (C_h) هو التمثيل البياني للدالة h

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها وارسم (Δ) و (C_h)



الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04,5 نقاط)

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطة A ذات اللاحقة $z_0 = 1 + i$

- (1) أ) عيّن ثم أنشئ (γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $z = z_0 + 2e^{i\theta}$ و θ يمسح \mathbb{R}
- ب) عيّن ثم أنشئ (γ') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $z = z_0 + ke^{i\frac{3\pi}{4}}$ و k يمسح \mathbb{R}^+
- ج) عيّن إحداثيات نقطة تقاطع (γ) و (γ')
- (2) نسمي B النقطة التي لاحقها z_1 حيث $z_1 = z_0 + 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

أ) عيّن الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1 - z_0}{z_0}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث OAB

ب) عيّن z_2 لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

ج) عيّن العددين الحقيقيين α و β بحيث تكون النقطة O مرجحا للجملة $\{(A; \alpha), (C; \beta)\}$ و $\alpha + \beta = \sqrt{2}$

د) عيّن ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $((1 + \sqrt{2})\overline{MA} - \overline{MC}) \cdot (\overline{MA} - \overline{MC}) = 0$

التمرين الثاني: (04,5 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

A ، B و C ثلاث نقط من الفضاء حيث $A(0; -1; 1)$ ، $B(1; 3; 2)$ و $C(-1; 3; 4)$

(1) أ) أحسب الجداء السلمي $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ ، ثم استنتج القيمة المدورة إلى الوحدة، بالدرجات، للزاوية BAC

ب) بيّن أن النقط A ، B ، C تعين مستويا.

(2) أ) بيّن أن الشعاع $\vec{n}(2; -1; 2)$ ناظمي للمستوي (ABC)

ب) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

(3) ليكن (S) سطح الكرة الذي معادلته: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + 5 = 0$

نسمي Ω و R مركز و نصف قطر (S) احسب R و عيّن احداثيات Ω

(4) أكتب معادلة ديكارتية لكل من المستويين (P_1) و (P_2) مماسي سطح الكرة (S) والموازيين للمستوي (ABC)

التمرين الثالث: (05 نقاط)

n و p عددان طبيعيان.

(1) أدرس، حسب قيم n ، بواقى القسمة الإقليدية على 16 للعدد 5^n

(2) نضع: $C_n = 16n + 9$ و $D_p = 5^p$

أ) بيّن أنه إذا كان $p = 4k + 2$ حيث k عدد طبيعي، فإنه يوجد عدد طبيعي n يحقق $C_n = D_p$

ب) عيّن n من أجل $p = 6$

(3) f هي الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = 5^{(4x+2)} - 9$
أدرس تغيرات الدالة f ، ثم استنتج إشارة $f(x)$

(4) (u_n) المتتالية المعرفة على \mathbb{N} كما يلي: $u_0 = 1$ و من أجل كل n من \mathbb{N} ،
 $u_{n+1} = 5^4 \left(u_n + \frac{9}{16} \right) - \frac{9}{16}$

(أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{5^{(4n+2)} - 9}{16}$

(ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن u_n عدد طبيعي.

(5) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

التمرين الرابع: (06 نقاط)

f هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = (x-1)e^x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) عيّن نهاية f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة f على \mathbb{R} ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) (أ) بيّن أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلاً وحيداً α على \mathbb{R} ، ثم تحقق أن $1,27 < \alpha < 1,28$

(ب) أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 وحدّد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T)

(ج) أرسم (T) و (C_f)

(4) عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $(x-1)e^x - (m-1)e^m = -1$ حلاً واحداً في \mathbb{R}

(5) h هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ: $h(x) = (|x|+1)e^{-|x|}$ و (C_h) تمثيلها البياني

(أ) بيّن أن الدالة h زوجية.

(ب) ارسم (C_h) مستعيناً بالمنحنى (C_f)

(6) g دالة معرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = (ax+b)e^x$ حيث: a, b عدنان حقيقيان

عيّن a, b حتى يكون: من أجل كل x من \mathbb{R} : $g'(x) = f(x)$

الإجابة النموذجية لموضوع امتحان بكالوريا دورة: 2014

المدة: 04 ساعات ونصف

الشعبة: تقني رياضي

اختبار مادة: الرياضيات

العلامة		عناصر الإجابة	(الموضوع الأول)
مجموع	مجزأ		
05.5		التمرين الأول: (05.5 نقطة)	
		(1) حل المعادلة:	
	4x0.25 $z_3 = i$ و $z_2 = \sqrt{3} - i$ و $z_1 = \sqrt{3} + i$ ، $\Delta = (2i)^2$	
	01 $\frac{z_1}{z_2} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ (أ) (2)	
	0.5	(ب) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = e^{i\left(\frac{n\pi}{3}\right)}$ ؛ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيلي صرف معناه $2n = 3 + 6k$ ليس لها حل في \mathbb{N}	
	0.25	لأن $2n$ زوجي و $3 + 6k$ فردي ومنه لا يوجد أي عدد طبيعي يحقق المطلوب....	
	0.5 (أ) (3) $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = -\frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$	
	0.5	$z' - z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}(z - z_1)$ (أو $z' = -\frac{\sqrt{3}}{2}iz + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$) النسبة $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، الزاوية $-\frac{\pi}{2}$	
	0.5	(ب) المثلث ABC قائم في A ، مع قبول أي تبرير صحيح.....	
	0.75 (أ) (4) (E) هي الدائرة التي مركزها $\omega\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$ ونصف قطرها $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$	
0.5 (ب) (E') هي محور القطعة $[AC]$ (أو معادلة (E') : $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$)		
04.5		التمرين الثاني: (04.5 نقط)	
	0.5	(1) (أ) بحل الجملة نجد $t = -1$ و $t' = -1$ ، إذن $B(1; 0; 2)$	
	0.5	(ب) $(P): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t - t' \\ z = 2 - t + 2t' \end{cases} ; (t; t') \in \mathbb{R}^2$	
	0.5	(2) (أ) $A(6; 4; 4)$ لا تنتمي إلى المستوي (P) ، لأن الجملة $\begin{cases} 6 = 1 + 2t \\ 4 = -2t - t' \\ 4 = 2 - t + 2t' \end{cases}$ ليس لها حل.	
	0.5	(ب) $B \in (P)$ و $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_1 = 0$ و $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_2 = 0$ ، حيث \vec{u}_1 و \vec{u}_2 شعاعا توجيه (Δ_1) و (Δ_2)	
	0.5	إذن B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P)	
	0.5	(3) (أ) $(Q): 5x + y - 7z - 6 = 0$	
0.5	(ب) $C(3; -2; 1)$ و $D(1; 1; 0)$		

0.25 (III) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} h(x) = -\infty$ و منه $x = \frac{\pi}{2}$ معادلة مستقيم مقارب (Δ)
0.25 $h(x) = f(\cos x)$ (2)
0.25 مركب الدالة $x \mapsto \cos x$ متبوعة بالدالة $x \mapsto f(x)$
	الدالة "cos" متناقصة تماما على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ و f متزيدة تماما على $]0; 1]$ ومنه h متناقصة تماما
0.25 على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
0.25 $h(0) = 0$ و $h'(0) = 0$ وجدول التغيرات
0.5 رسم (Δ) و (C_h)

العلامة		عناصر الإجابة	(الموضوع الثاني)										
مجموع	مجزأة												
04.5		التمرين الأول: (04.5 نقط)											
	0.75	1 أ) (γ) هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها 2. إنشاء (γ)											
	0.75	ب) (γ') نصف مستقيم مبدؤه A ومعامل توجيهه $tg(\frac{3\pi}{4}) = -1$. إنشاء (γ')											
	0.5	ج) إحداثيات نقطة تقاطع (γ) و (γ') هي: $(1-\sqrt{2};1+\sqrt{2})$											
	0.5	2 أ) $\frac{z_1 - z_0}{z_0} = i\sqrt{2}$											
	0.5 $\frac{z_0 - z_1}{z_0} = -i\sqrt{2}$ ومنه OAB مثلث قائم في A											
	0.25	ب) $z_2 = 1 + \sqrt{2} - i(1 + \sqrt{2})$											
	0.5	ج) $\begin{cases} \alpha + (1 + \sqrt{2})\beta = 0 \\ \alpha + \beta = \sqrt{2} \end{cases}$ ومنه $(\alpha;\beta) = (1 + \sqrt{2};-1)$											
	0.5	د) $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AC} = 0$ ، (E) هي المستقيم المار من O و \overrightarrow{AC} شعاع ناظمي له..... (تبرير آخر: معادلة (E) هي $y = -x$)											
	0.25	إنشاء (E)											
04.5		التمرين الثاني: (4.5 نقطة)											
	01	1 أ) $\widehat{BAC} = 34^\circ$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 18$											
	0.5	ب) $\widehat{BAC} \neq 0$ و $\widehat{BAC} \neq \pi$ ومنه A, B, C تعين مستويا.....											
	0.5	2 أ) $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$											
	0.5	ب) $(ABC): 2x - y + 2z - 3 = 0$											
	01	3 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 9$ ، $\Omega(2;-3;1)$ ، $R = 3$											
	0.25	4 $(P): 2x - y + 2z + d = 0$											
	0.5 $ 9 + d = 9$ ومنه $d = 0$ ، $d = -18$											
	0.25 $(P_1): 2x - y + 2z = 0$ و $(P_2): 2x - y + 2z - 18 = 0$											
	05		التمرين الثالث: (05 نقط)										
01		1 بواقي القسمة الإقليدية على 16 للعدد 5^n :											
		<table><tr><th>قيم n</th><th>$4k$</th><th>$4k+1$</th><th>$4k+2$</th><th>$4k+3$</th></tr><tr><td>الباقى</td><td>1</td><td>5</td><td>9</td><td>13</td></tr></table>	قيم n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	الباقى	1	5	9	13	
قيم n		$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$								
الباقى	1	5	9	13									
0.5	2 أ) من أجل $p = 4k + 2$ ، $(k \in \mathbb{N})$ ، $5^p \equiv 9[16]$ ومنه يوجد $n \in \mathbb{N}$ يحقق $5^p = 9 + 16n$ أي $C_n = D_p$												
0.5	ب) من أجل $p = 6$ ، $n = 976$												

		<p>(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، $f'(x) = 4 \ln 5 \times 5^{4x+2} > 0$ ، f متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$</p>
0.75		جدول التغيرات
0.5		استنتاج أن $f(x) > 0$
		(4) أ) $\frac{5^{(4 \times 0 + 2)} - 9}{16} = 1 = u_0$. نفرض $u_n = \frac{5^{(4n+2)} - 9}{16}$ ومن $u_{n+1} = 5^4(u_n + \frac{9}{16}) - \frac{9}{16}$ نجد $u_{n+1} = \frac{5^{4n+6} - 9}{16}$
0.75		ومنه لكل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_n = \frac{5^{(4n+2)} - 9}{16}$
0.5		ب) $5^{(4n+2)} \equiv 9[16]$ ومنه $5^{(4n+2)} - 9 \equiv 0[16]$ أي $u_n = \frac{5^{(4n+2)} - 9}{16} \in \mathbb{N}$
0.5		(5) $u_n = \frac{1}{16} f(n)$ و $\frac{1}{16} > 0$ ومنه (u_n) متزايدة تماماً لأن f متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$
		التمرين الرابع: (06 نقطة)
0.5		(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
0.75		(2) $f'(x) = xe^x$ ، f متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$ ومتناقصة تماماً على $]-\infty; 0]$
0.25		جدول التغيرات
0.25		(3) أ) $1 \notin [-1; 0[$ ومنه المعادلة لا تقبل حلاً على $]-\infty; 0]$
		f مستمرة ومتزايدة تماماً على $[0; +\infty[$ و $1 \in [-1; +\infty[$ إذن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلاً
0.25		وحيث في \mathbb{R}
0.5		$f(1,27) \approx 0.96$; $f(1,28) \approx 1.01$ لأن $f(1,27) < 1 < f(1,28)$
0.75		ب) $(T): y = ex - e$ ، (C_f) أعلى (T) لأن $f(x) - y = (x-1)(e^x - e) \geq 0$...
0.75		ج) رسم (T) و (C_f)
0.25		(4) $f(x) = f(m) - 1$ يعني $(x-1)e^x - (m-1)e^m = -1$
0.25		$f(x) = f(m) - 1$ تقبل حلاً واحداً إذا كان $f(m) - 1 = -1$ أو $f(m) - 1 \geq 0$
0.25		أي $m = 1$ أو $m \geq \alpha$ (f متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$ و $\alpha > 0$)
0.25		(5) أ) دالة زوجية لأنها معرفة على \mathbb{R} و $h(-x) = h(x)$
		ب) إذا كان $x \leq 0$ فإن $h(x) = -f(x)$ ومنه (C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور
0.25		الفواصل على المجال $]-\infty; 0]$ ثم نكمل الرسم بالتناظر بالنسبة إلى محور الترتيب
0.25		رسم (C_h)
0.5		(6) $g'(x) = (ax + a + b)e^x$ ، بالمطابقة نجد ، $a = 1$ ، $b = -2$